Lancer d’un projectile

Mouvement de chute libre

En première approximation, lorsqu’on étudie le mouvement d’un projectile après son lancer, on néglige toutes les forces extérieures qui s’exercent sur le projectile autres que son poids.

On dit alors que le projectile a un mouvement de chute libre.

Rq : *Bien que l’environnement soit à 3 dimensions, le mouvement de chute libre se fait toujours dans un plan. 2 coordonnées (x et z) suffisent donc à l’étudier.*

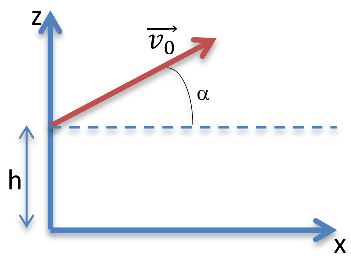
On a donc la situation suivante :

- système : projectile de masse m
- référentiel : terrestre, supposé galiléen
- bilan des forces : poids du projectile $\vec{P} = m\vec{g}$

Importance des conditions initiales

Au cours de sa chute libre, le projectile peut monter et/ou descendre, verticalement ou également en partie horizontalement.

La trajectoire qu’il va avoir dépend avant tout des conditions initiales, c'est-à-dire la position depuis laquelle il a été lancé, ainsi que la vitesse (direction, sens et valeur) avec laquelle il a été lancé.



Dans le cas général d’un projectile lancé depuis une altitude h avec un vecteur vitesse quelconque, on peut écrire :

$$\overrightarrow{OG_0}\begin{pmatrix}0\\h\end{pmatrix} \; et \; \overrightarrow{v_0}\begin{pmatrix}v_0 cosa\\v_0 sin\alpha\end{pmatrix}$$

Rq : *Lorsque le vecteur vitesse initial est horizontal, on a* $\overrightarrow{v_0}\begin{pmatrix}v_0\\0\end{pmatrix}$

Lorsque le vecteur vitesse initial est vertical, on a $\overrightarrow{v_0}\begin{pmatrix}0\\\pm v_0\end{pmatrix}$

Equations horaires

- Le principe fondamental de la dynamique (2eme loi de Newton) permet de modéliser l’évolution temporelle du projectile :

$$PFD : \sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \cancel{m}\vec{g} = \cancel{m}\vec{a} \Rightarrow \vec{g} = \vec{a}$$

On a donc, dans le repère défini précédemment : $\boldsymbol{\vec{a}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{-g}\end{pmatrix}$

- Par définition, $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) \Rightarrow \begin{cases}\frac{d}{dt}v_x(t) = a_x = 0\\\frac{d}{dt}v_z(t) = a_z = -g\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}v_x(t) = C_1\\v_z(t) = -gt + C_2\end{cases}$

L’expression des constantes C_1 et C_2 dépend des conditions initiales :

$$v_x(0) = C_1 = v_0 cosa$$
$$v_z(0) = -g \times 0 + C_2 = C_2 = v_0 sin\alpha$$

On a donc : $\boldsymbol{\vec{v}(t)}\begin{pmatrix}\boldsymbol{v_0 cosa}\\\boldsymbol{-gt+v_0 sin\alpha}\end{pmatrix}$

- Par définition, $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OG}(t) \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = v_x(t) = v_0 cos\alpha \\ \frac{d}{dt}z(t) = v_z(t) = -gt + v_0 sin\alpha \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = (v_0 cos\alpha)t + C_3 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 sin\alpha)t + C_4 \end{cases}$$

L'expression des constantes C_3 et C_4 dépend des conditions initiales :

$$x(0) = (v_0 cos\alpha)0 + C_3 = C_3 = 0$$

$$z(0) = -\frac{1}{2}g \times 0^2 + (v_0 sin\alpha) \times 0 + C_4 = C_4 = h$$

On a donc : $\boldsymbol{\overrightarrow{OG}(t)} \begin{pmatrix} \boldsymbol{(v_0 cos\alpha)t} \\ \boldsymbol{-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 sin\alpha)t + h} \end{pmatrix}$ **Equations horaires**

Equation de la trajectoire

L'élimination du paramètre temps dans les équations horaires permet d'obtenir l'équation de la trajectoire du projectile :

$$x = (v_0 cos\alpha)t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 cos\alpha} \Rightarrow z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 cos\alpha}\right)^2 + (v_0 sin\alpha)\frac{x}{v_0 cos\alpha} + h$$

D'où l'équation de la trajectoire parabolique du projectile : $z = -\frac{g}{2{v_0}^2 cos^2\alpha}x^2 + x tan\alpha + h$

L'analyse des équations horaires (position et vitesse) et de l'équation de la trajectoire permettent de dévoiler tous les secrets du mouvement du projectile après son lancer.